

Precessione del perielio e relatività ristretta: conseguenze dovute all'introduzione dell'ipotesi di variazione della massa gravitazionale

Fausto Vezzaro
sitofausto@gmail.com

30 agosto 2014

■ 1 Introduzione

Come è noto la meccanica classica porta a descrivere la traiettoria dei pianeti come curve chiuse su se stesse di tipo ellittico. L'osservazione astronomica mostra invece che tali ellissi precessano lentamente dando luogo a traiettorie “a rosetta”. Un modello matematico che supporti questa evidenza sperimentale può essere ottenuto grazie alla relatività ristretta, mediante la quale si può costruire un modello più complesso ma più aderente al reale, che chiameremo modello $\mathcal{RR}$. Con questo modello, tuttavia, l'angolo di precessione risulta pari a un sesto del valore vero¹. Per porre rimedio a questa discrepanza tra modello e realtà, si può ricorrere alla teoria della relatività generale. La scoraggiante complessità di questa teoria però stimola la ricerca di strade più semplici per lo studio del fenomeno. In questo articolo si propone una semplice variante del modello $\mathcal{RR}$ che porta ad una valutazione più accurata della precessione. Precisamente si ipotizza che la massa gravitazionale del corpo orbitante cresca con la velocità secondo il fattore di Lorentz. Grazie al nuovo modello, che chiameremo $\mathcal{RR}2$, l'errore di valutazione della precessione si dimezza (un terzo del valore vero).

L'articolo è organizzato nel modo seguente. Nel **paragrafo 2** si fanno alcune considerazioni sulla conservazione del momento angolare, sulla relazione tra forza velocità e accelerazione in relatività e sulle deduzioni delle orbite nella teoria newtoniana. Nel **paragrafo 3** si deducono analiticamente le orbite nel contesto $\mathcal{RR}$ usando la “solita” legge di gravitazione universale di Newton, ma sfruttando le leggi relativistiche per la conservazione di energia e quantità di moto. Nel **paragrafo 4** si descrive il contesto $\mathcal{RR}2$, al quale si è accennato poco fa. Nel **paragrafo 5** si descrivono i sistemi di equazioni differenziali che regolano il moto nei contesti $\mathcal{RR}$ e $\mathcal{RR}2$. Nel **paragrafo 6** si spiega come ho risolto numericamente il problema di descrivere le orbite nel contesto $\mathcal{RR}2$, e si elencano i risultati ottenuti. Infine, in **appendice**, ho sistemato tutte le dimostrazioni (ritengo che inserirle nel corpo dell'articolo avrebbe fatto perdere di continuità al discorso).

¹Questo è sicuramente vero nel limite non relativistico (vedi ad esempio [BA, pag. 146] o [ME, Vol. I, pag. 216]), ma non sono sicuro che in generale il rapporto tra osservazione e la previsione $\mathcal{RR}$ sia semplicemente 6.

■ 2 Considerazioni iniziali

2.1 Conservazione del momento angolare in relatività

Definiamo il momento della forza e il momento angolare come prodotto vettoriale del vettore posizione per i vettori forza e quantità di moto rispettivamente:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (1a)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (1b)$$

Allora, purché

- la forza sia definita come derivata temporale della quantità di moto
- la quantità di moto sia diretta come la velocità

si ha che (vedi dimostrazione A.1 a pagina 13)

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} \quad (2)$$

e che, in particolare, in un campo di forze centrali il vettore momento angolare si conserva.

Va osservato che, poiché le due supposizioni alle quali ci appoggiamo nella dimostrazione valgono sia in meccanica classica che in relatività, questo teorema vale in entrambi i contesti (nei quali comunque ovviamente la definizione di quantità di moto, e quindi di momento angolare, è diversa).

2.2 Relazione tra forza, velocità e accelerazione in relatività

Se postuliamo la formula di Planck-Minkowski della forza

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(\gamma m \mathbf{v}) \quad (3)$$

abbiamo che (vedi dimostrazione A.2 a pagina 14) forza, velocità e accelerazione sono legate dalla

$$\gamma m \mathbf{a} = \mathbf{F} - \frac{\mathbf{v}}{c^2}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) \quad (4)$$

La (4) è un modo alternativo di scrivere la formula di Planck-Minkowski. Si può osservare che dalla (4) possono essere dedotte due formule semplici valide in casi particolari:

- Se forza, velocità e accelerazione hanno tutte la stessa direzione, si ha $\mathbf{F} = \gamma^3 m \mathbf{a}$
- Se forza e velocità sono ortogonali, si ha $\mathbf{F} = \gamma m \mathbf{a}$

La seconda è immediata, ma anche la prima può essere ottenuta facilmente sostituendo $\mathbf{F} = F \hat{\mathbf{n}}$, $\mathbf{a} = a \hat{\mathbf{n}}$ e $\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{n}}$ (dove $\hat{\mathbf{n}}$ è un versore) e moltiplicando scalarmente per $\hat{\mathbf{n}}$. Queste formule, abbinate al fatto che la carica è relativisticamente invariante, possono essere utili nello studio di situazioni particolari di grande interesse. Comunque nello studio relativistico dei moti planetari a noi servirà esclusivamente la formula generale (4).

2.3 Analisi classica del moto planetario

2.3.1 Soluzione del problema della forma dell'orbita

Se si usano le coordinate polari, il sistema di equazioni differenziali che in meccanica classica regola il moto di un pianeta è (vedi dimostrazione A.3 a pagina 14)

$$\begin{cases} r^3\dot{\theta}^2 - r^2\ddot{r} = \alpha & (\alpha = GM_\odot) \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (5a)$$

$$(5b)$$

Non risolveremo analiticamente questo sistema (per alcune considerazioni vedi il punto 2.3.3), ma descriveremo ora in modo semplice ed elegante la forma dell'orbita (ho preso spunto da [SP]).

Supponiamo che a un dato istante (per semplicità, chiamiamolo istante zero) la particella abbia vettore posizione $\mathbf{r}_0$ diretto come il versore $\hat{\mathbf{x}}$ dell'asse x (talvolta denotato con $\hat{\mathbf{i}}$) e vettore velocità $\mathbf{v}_0$ diretto come il versore $\hat{\mathbf{y}}$ dell'asse y (talvolta denotato con $\hat{\mathbf{j}}$):

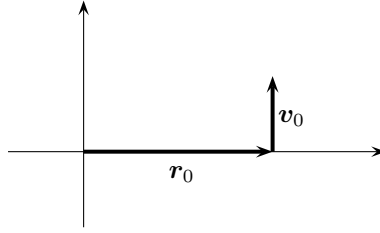


Figura 1. Condizioni iniziali.

Allora (vedi dimostrazione A.4 a pagina 15) l'orbita è descritta dall'equazione

$$r(\theta) = r_0 \frac{\xi}{1 + (\xi - 1) \cos \theta} \quad \left(\xi = \frac{r_0 v_0^2}{GM_\odot} \right) \quad (6)$$

dove r e θ sono le due variabili delle coordinate polari. Si tratta naturalmente della formula polare delle coniche.

2.3.2 Considerazioni sulla formula delle orbite classiche

Dalla (6) si vede subito che il semiasse maggiore dell'orbita, cioè $r(0) + r(\pi)$, è

$$\frac{r_0}{1 - \frac{\xi}{2}} \quad (7)$$

quindi vale $2r_0$ se $\xi = 1$ mentre diverge se $\xi \rightarrow 2$. Nel primo caso si vede dalla (6) che r non dipende da θ , e abbiamo quindi a che fare con una circonferenza. Il secondo caso evidentemente corrisponde al caso limite parabolico. Allora

$0 < \xi < 2$ corrisponde al caso ellittico. Se $\xi > 2$ giungiamo all'apparente paradosso che il semiasse maggiore è negativo, evidentemente ciò corrisponde al fatto che le orbite sono aperte (caso iperbolico). Possiamo infine osservare che se $\xi \rightarrow \infty$ (il che corrisponde a velocità iniziale o posizione iniziale sufficientemente grandi: $v_0 \gg \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_0}}$ o $r_0 \gg \frac{GM_\odot}{v_0^2}$) l'orbita è descritta da $r = \frac{r_0}{\cos \theta}$. Il lettore non si sorprenderà nel constatare che essa rappresenta una “retta verticale” in coordinate polari (a distanza r_0 dall'asse y).

2.3.3 Considerazioni sul calcolo che restituisce la posizione del pianeta in funzione del tempo

Osserviamo infine che la (6) non costituisce una soluzione davvero completa del problema delle orbite: abbiamo risolto in modo molto bello il problema della *forma* dell'orbita, ma non abbiamo stabilito quale sarà la posizione del pianeta in qualsiasi istante. Per farlo occorrerebbe risolvere il sistema (5).

Sfruttando il vettore $\mathbf{h}$ (che viene introdotto con l'equazione (36), e che in base alla (54) ha modulo fissato dalle condizioni iniziali) si può isolare $\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$ e, sostituendo nella (5a) ottenere l'equazione differenziale della sola funzione incognita r :

$$\alpha r + r^3 \ddot{r} = h^2 \quad (8)$$

Integrando questa equazione differenziale si può in teoria ottenere la funzione $r = r(t)$. Si potrebbe poi ottenere la funzione $\theta = \theta(t)$ tramite l'integrale $\theta(t) = h \int \frac{dt}{r^2}$. Naturalmente tutto ciò andrebbe accompagnato da considerazioni che colleghino le costanti di integrazione alle condizioni iniziali. Non ho trovato questi conti svolti, né sono riuscito a svolgerli per conto mio (ho comunque risolto in modo completo il problema delle orbite utilizzando metodi numerici).

■ 3 La precessione del perielio nel contesto $\mathcal{RR}$

3.1 Le ipotesi $\mathcal{RR}$

Classicamente nello studio del moto dei pianeti si lavora sulla base di queste quattro ipotesi (la quarta può sembrare un poco ridondante, il fatto è che considero la prima ipotesi in senso restrittivo): i) vale la meccanica classica; ii) $M_\odot \gg m$ e tutta la massa è concentrata nei due corpi puntiformi; iii) la massa dei due corpi è costante iv) la forza è descritta dalla legge di gravitazione universale. Le ultime tre ipotesi portano ad affermare che se il corpo centrale è posto nell'origine la forza è semplicemente descritta dalla

$$\mathbf{F} = -\frac{GM_\odot m}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (9)$$

È ben noto, e lo abbiamo già mostrato in questo articolo, che queste ipotesi portano a concludere che le orbite dei pianeti (le orbite “chiuse”) sono ellissi.

Meno noto è che la sostituzione dell'ipotesi “vale la meccanica classica” con l'ipotesi “vale la relatività ristretta” conduce a una situazione assai differente: le ellissi delle orbite planetarie precessano lentamente. Chiamerò l'insieme di questa nuova quaterna di ipotesi, *ipotesi $\mathcal{RR}$* :

- vale la relatività ristretta
- $M_{\odot} \gg m$ e tutta la massa è concentrata nei due corpi puntiformi
- la massa dei due corpi è costante
- la forza è descritta dalla legge di gravitazione universale

Diremo che siamo nel contesto $\mathcal{RR}$ (o più brevemente in $\mathcal{RR}$) quando supporremo valide le ipotesi $\mathcal{RR}$.

Va osservato che la sostituzione della prima ipotesi non può essere fatta impunemente, non fosse altro che per il fatto che la quarta ipotesi sembra implicare la possibilità di trasmettere segnali a velocità infinita, fatto che se vogliamo che le cause avvengano prima degli effetti sarebbe incompatibile con l'ipotesi di equivalenza dei sistemi di riferimento inerziali (anche se non sarebbe incompatibile con la teoria della relatività di Lorentz, né ad esempio con una ulteriore ipotesi che limiti la velocità di propagazione del campo gravitazionale). Tuttavia nello studio delle orbite planetarie abbiamo a che fare con un campo gravitazionale statico e una eventuale velocità di propagazione finita non influenza i risultati. Inoltre non è possibile risolvere tutti i problemi in una volta, e un piccolo accorgimento mi ha consentito di migliorare il risultato approssimato dell'angolo di precessione ottenuto con le ipotesi $\mathcal{RR}$, quindi ritengo che valga la pena approfondire.

Riprendo la dimostrazione delle orbite in $\mathcal{RR}$ da [BA] ma spendo qualche parola in più sulle premesse (giustificando l'esistenza di una funzione V che sommata all'energia cinetica restituisce una costante del moto), scrivo esplicitamente tutti i passaggi, e collego il risultato alle condizioni iniziali alle quali faccio riferimento in questo articolo (figura 1 a pagina 3).

3.2 Ipotesi $\mathcal{RR}$ ed energia

Definiamo energia cinetica ed energia potenziale come segue

- T vale zero quando il corpo è fermo. La variazione di T corrisponde al lavoro compiuto sul corpo.
- V vale zero quando il corpo è nella regione di riferimento (a volte si parla di “posizione di riferimento”, ma in effetti di solito è una intera regione isoenergetica a fungere da posizione di riferimento). La variazione di V corrisponde all'opposto del lavoro che la forza conservativa compie sul corpo (la presenza di forze non conservative renderebbe impossibile considerare V come una funzione dello spazio).

V può essere definita più concisamente dicendo che corrisponde al lavoro compiuto dalla forza conservativa se in corpo è portato nella regione di riferimento. Da come T e V sono definiti, è ovvio che quando il corpo si muove soggetto alle sole forze conservative la somma $T+V$ (solitamente chiamata energia meccanica E del sistema) è una costante. Nel contesto $\mathcal{RR}$ vale la legge di gravitazione di Newton classica, quindi l'energia potenziale è ancora definita, ed a la stessa espressione:

$$V(r) = -\frac{\alpha m}{r} \quad (10)$$

L'energia cinetica vale invece (vedi dimostrazione A.5 a pagina 18)

$$T = mc^2(\gamma - 1) \quad (11)$$

da cui, con uno sviluppo di Taylor si trova naturalmente il caso limite $T = \frac{1}{2}mv^2$. Poiché l'energia potenziale è definita a meno di una costante additiva arbitraria, possiamo sommare l'energia di riposo mc^2 e scrivere l'energia del sistema in questo modo

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\alpha m}{r} \quad (12)$$

L'aggiunta dell'energia a riposo non è in effetti indispensabile in questa dimostrazione (pur di ricordarsi, scrivendo la (71), di fare la stessa scelta) ma non aggiungerla ci obbligherebbe a sostituire E con $E + mc^2$ in tutto il paragrafo A.6 (appesantendo le notazioni).

3.3 Le orbite in $\mathcal{RR}$

Svolgendo i conti si trova (per la dimostrazione vedi A.6 a pagina 19) che nel contesto $\mathcal{RR}$, se le condizioni iniziali sono quelle di figura 1, l'orbita è descritta dall'equazione polare

$$r(\theta) = r_0 \frac{\frac{p}{r_0}}{1 + \left(\frac{p}{r_0} - 1\right) \cos(q\theta)} \quad (13)$$

dove

$$q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2(c^2 - v_0^2)}{c^4 r_0^2 v_0^2}} \quad (14a)$$

$$p = \frac{\frac{r_0^2 v_0^2 c^4}{c^2 - v_0^2} - \alpha^2}{\alpha \left(\frac{c^3}{\sqrt{c^2 - v_0^2}} - \frac{\alpha}{r_0} \right)} \quad (14b)$$

L'orbita (13) è rappresentata graficamente in figura 2. È facile vedere che se $c \rightarrow \infty$ si ha $q \rightarrow 1$ e $p \rightarrow \frac{r_0^2 v_0^2}{\alpha}$. Quindi si ritrova l'orbita descritta dall'equazione (6), come deve essere.

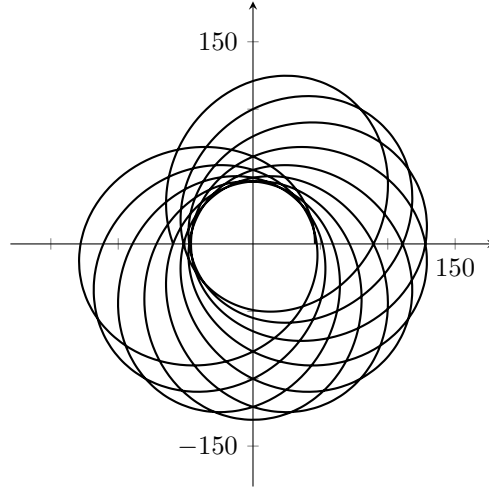


Figura 2. Orbita di Mercurio prevista dalle ipotesi $\mathcal{RR}$. Le condizioni iniziali sono quelle di figura 1 con (unità SI) $|r_0| = 4,6 \cdot 10^{10}$ e $|v_0| = 5,9 \cdot 10^4$. L'angolo θ è stato fatto variare da 0 a 21π radianti. Per realizzare un grafico che evidenziasse l'effetto relativistico della precessione (altrimenti invisibile per la sua piccolezza), la velocità della luce è stata ridotta in modo fittizio a $c = 2v_0 = 1,18 \cdot 10^5$ m/s (è interessante osservare che questo, oltre a determinare un vistoso moto a rosetta, ha anche notevolmente "ampliato" l'orbita). Le tacche sugli assi si riferiscono ai milioni di chilometri. Come previsto dall'equazione (15), a ogni rivoluzione l'asse ruota di circa $25^\circ 42'$.

3.4 La precessione in $\mathcal{RR}$

La (13) implica che (vedi dimostrazione A.7 a pagina 23) a ogni giro l'asse dell'orbita subisce una rotazione pari a $2\pi(q^{-1} - 1)$, cioè a

$$\Delta\theta = 2\pi \left[\left(1 - \frac{\alpha^2(c^2 - v_0^2)}{c^4 r_0^2 v_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right] \quad (15)$$

Se $\frac{\alpha}{cr_0} \ll v_0 \ll c$, si può ricorrere alla formula più semplice

$$\Delta\theta = \frac{K}{(v_0 r_0)^2} \quad \left(K = \frac{\pi G^2 M_\odot^2}{c^2} \approx 6,160 \cdot 10^{23} \text{ m}^4/\text{s}^2 \right) \quad (16)$$

Nel caso di Mercurio (ponendo $r_0 = 4,6 \cdot 10^{10}$ m e $v_0 = 5,9 \cdot 10^4$ m/s) questa formula è utilizzabile e restituisce circa 0,017 secondi/giro. Dato che Mercurio compie un giro intorno al Sole ogni 88 giorni, questo dato corrisponde a poco più di 7 secondi al secolo. Il valore osservato è circa sei volte più grande ma è interessante osservare che questa strana analisi ha centrato in pieno l'ordine di grandezza.

3.5 Orbite quasi ellittiche in $\mathcal{RR}$

Perché l'orbita sia “quasi ellittica” (cioè avente la forma di un'ellisse rotante) deve essere soddisfatta la (vedi dimostrazione A.8 a pagina 23)

$$\frac{\sqrt{1 - \beta_0^2} - (1 - \beta_0^2)}{v_0^2} \alpha < r_0 < \frac{\sqrt{1 - \beta_0^2} + (1 - \beta_0^2)}{v_0^2} \alpha \quad (17)$$

dove $\beta_0 = \frac{v_0}{c}$. Nel caso limite classico $\beta_0 \rightarrow 0$ la (17) diventa $r_0 < \frac{2\alpha}{v_0^2}$, come ci si aspetta in base a quanto visto nel paragrafo 2.3.2.

■ 4 Il contesto $\mathcal{RR2}$

Consideriamo la possibilità che la massa gravitazionale del corpo orbitante vari con la velocità secondo la formula $m(v) = \gamma m$. Introduciamo cioè il contesto $\mathcal{RR2}$ definito dalle seguenti ipotesi

- vale la relatività ristretta
- $M_\odot \gg m$ e tutta la massa è concentrata nei due corpi puntiformi
- la massa gravitazionale del corpo orbitante cresce con la velocità secondo la $m(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
- la forza è descritta dalla legge di gravitazione universale

Si intuisce che la modifica della terza ipotesi porta a un incremento della precessione che si ha in $\mathcal{RR}$, questo suggerisce di procedere con i calcoli ma non significa, a priori, che porti a un miglioramento della stima dell'angolo di precessione. Analizzeremo successivamente il contesto $\mathcal{RR2}$ utilizzando un metodo numerico che ci consentirà di fare soddisfacenti considerazioni quantitative.

■ 5 I sistemi di equazioni differenziali che determinano le orbite in $\mathcal{RR}$ e $\mathcal{RR2}$

Per potere affrontare numericamente il problema dei moti orbitali (vedi paragrafo 6) sarà indispensabile disporre dei sistemi di equazioni differenziali che regolano il moto (per la loro dimostrazione vedi appendice A.9 a pagina 23). Nei casi $\mathcal{RR}$ e $\mathcal{RR2}$ abbiamo rispettivamente

$$\begin{cases} r^3 \dot{\theta}^2 - r^2 \ddot{r} = \frac{\alpha}{\gamma} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} \right) \end{cases} \quad (18a)$$

$$\begin{cases} r \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{\alpha \dot{\theta}}{c^2 \gamma r} \end{cases} \quad (18b)$$

e

$$\begin{cases} r^3 \dot{\theta}^2 - r^2 \ddot{r} = \alpha \left(1 - \frac{r^2}{c^2}\right) \\ r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} = \frac{\alpha \dot{r} \dot{\theta}}{c^2 r} \end{cases} \quad (19a)$$

$$\quad (19b)$$

dove come sempre $\alpha = GM_\odot$ e dove γ può essere espressa in funzione di r così

$$\gamma(r) = \sqrt{1 + \frac{\gamma_0^2 v_0^2 r_0^2}{c^2 r^2}} \quad (20)$$

Sorprendentemente l'ipotesi di crescita della massa gravitazionale con la velocità semplifica notevolmente il sistema (si osservi che nel sistema (19) è *scomparso* il fattore γ), ma non così tanto da non rendere indispensabile un'analisi numerica per la risoluzione. È facile vedere che per $c \rightarrow \infty$ i sistemi (18) e (19) si riducono al sistema (5).

■ 6 Approcci numerici in $\mathcal{RR}$ e $\mathcal{RR}2$

6.1 Considerazioni generali

Sappiamo che con le nostre condizioni iniziali si ha che all'istante zero $r = r_0$, $\dot{r} = 0$ per la (53a) e $\theta = 0$. Inoltre sappiamo che per piccoli incrementi di tempo $\Delta r = \dot{r} \Delta t$, $\Delta \dot{r} = \ddot{r} \Delta t$, $\Delta \theta = \dot{\theta} \Delta t$. Ma allora se trovassimo tre funzioni f , g e h tali che

$$\ddot{r} = f(r, \dot{r}) \quad (21a)$$

$$\dot{\theta} = g(r, \dot{r}) \quad (21b)$$

$$\ddot{\theta} = h(r, \dot{r}) \quad (21c)$$

potremmo, con un foglio di calcolo, impostare una soluzione numerica del problema in questo modo:

	A	B	C	D	E	F	G
1	t	r	$\dot{r}$	$\ddot{r}$	θ	$\dot{\theta}$	$\ddot{\theta}$
2	0	r_0	0	$f(r, \dot{r})$	0	$g(r, \dot{r})$	$h(r, \dot{r})$
3	Δt	B2+C2 Δt	C2+D2 Δt	$f(r, \dot{r})$	E2+F2 Δt	$g(r, \dot{r})$	$h(r, \dot{r})$
4	2 Δt	B3+C3 Δt	C3+D3 Δt	$f(r, \dot{r})$	E3+F3 Δt	$g(r, \dot{r})$	$h(r, \dot{r})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Incrementando di volta in volta il tempo, e calcolando tutte le altre caselle nel modo indicato, possiamo ottenere numericamente le funzioni $r = r(t)$ e $\theta = \theta(t)$, e quindi descrivere in modo completo il moto orbitale, senza dover risolvere analiticamente i sistemi di equazioni differenziali, impresa che sarebbe probabilmente impossibile in casi come il (18).

6.2 Considerazioni sulla risoluzione numerica delle orbite $\mathcal{RR}$

Può sembrare superfluo risolvere numericamente un problema che è già stato risolto analiticamente, tuttavia credo che in questo caso si tratti di un passaggio importante. Verificheremo infatti la bontà dell'idea di risolvere questi complicati sistemi di equazioni differenziali usando fogli di calcolo, e potremo farci un'idea di quali scelte occorre fare per quanto riguarda le delicate questioni dell'intervallo di tempo, del numero di passaggi, della variazione del valore reale delle costanti fisiche. Spero che i risultati siano convincenti anche agli occhi del lettore. Egli è naturalmente invitato a verificare per conto suo utilizzando fogli di calcolo o qualche altro tipo di software. Io ho usato software libero (figura 3).

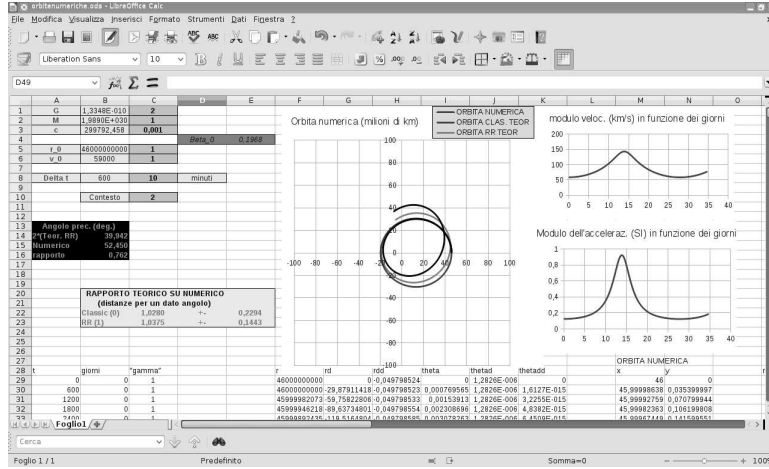


Figura 3. Screenshot del foglio di calcolo utilizzato per analizzare numericamente le orbite.

6.3 Risoluzione numerica del problema delle orbite $\mathcal{RR}$

Le funzioni (21) nel caso $\mathcal{RR}$ sono (per la dimostrazione vedi A.10 a pagina 24)

$$f(r, \dot{r}) = \frac{r_0^2 v_0^2 (c^2 - \dot{r}^2)}{r [r^2 (c^2 - v_0^2) + r_0^2 v_0^2]} - \frac{\alpha}{r^2 \gamma} + \frac{\alpha \dot{r}^2}{r^2 c^2 \gamma} \quad (22a)$$

$$g(r, \dot{r}) = \frac{r_0 v_0}{r} \sqrt{\frac{c^2 - \dot{r}^2}{r^2 (c^2 - v_0^2) + r_0^2 v_0^2}} \quad (22b)$$

$$h(r, \dot{r}) = \frac{\alpha \dot{\theta}}{\gamma c^2 r^2} - \frac{2 \dot{r} \dot{\theta}}{r} \quad (22c)$$

Nella prima e nell'ultima compare γ , ma sappiamo che è funzione di r secondo la (20). Inoltre nell'ultima compare $\dot{\theta}$, ma noi sappiamo calcolare $\dot{\theta}$ in funzione di r e $\dot{r}$ tramite la (22b) quindi possiamo dire che le tre funzioni (22) dipendono

effettivamente dalle sole variabili r e $\dot{r}$ (oltre ai parametri che caratterizzano il sistema e le condizioni iniziali, ovviamente).

Poiché l'effetto relativistico cercato è troppo piccolo, per testare la validità dell'analisi numerica ho dovuto "ridurre la velocità della luce" di circa tre ordini di grandezza. Ho anche sperimentato variazioni della costante di gravitazione universale e delle condizioni iniziali. Per il lettore che volesse cimentarsi nei conti, tenga presente che ho utilizzato un software che lavora con quindici cifre significative e che ho fatto fare al computer 5 mila passaggi numerici. Riporto alcuni risultati²:

$\frac{G_{fittizia}}{G}$	$\frac{c_{fittizia}}{c}$	$\frac{r_{iniziale}}{4,6 \cdot 10^{10}}$	$\frac{v_{iniziale}}{5,9 \cdot 10^4}$	$\frac{\Delta t}{(\text{minuti})}$	$\frac{\text{teorico} \mathcal{R} \mathcal{R}}{\text{numerico} \mathcal{R} \mathcal{R}}$
1	0,001	1	1	30	0,999
2	0,001	1	1	10	0,995
1	0,002	1	1	30	1,030
1	0,003	1	1	30	0,994
1	0,001	0,5	1	5	0,995
1	0,001	1	0,5	10	0,980
1	0,0005	1	1	40	0,994
1	0,05	1	1	30	0,033

L'ultima colonna è il rapporto tra l'angolo di precessione previsto teoricamente dalla (15), e l'angolo di precessione ottenuto numericamente (angolo medio tra i due punti in cui $\dot{r}$ cambia segno dopo più di un giro).

Come si vede, purché la velocità della luce sia circa tre ordini di grandezza più piccola di quella vera e le condizioni iniziali siano simili a quelle reali (come ordine di grandezza), il calcolo numerico restituisce risultati corretti entro qualche percento. L'analisi numerica con queste caratteristiche (15 cifre significative e 5 mila passaggi numerici) fallisce se

- la velocità della luce diventa troppo grande (nell'ultima linea è un ventesimo del valore vero)
- la velocità della luce diventa troppo piccola (le orbite fortemente relativistiche tendono a diventare iperboliche, questo in effetti non dovrebbe sorprendere perché il termine a destra nella (17) si annulla)

Faremo tesoro di queste nozioni nell'affrontare numericamente problemi la cui soluzione teorica è ignota.

²Ho esaminato solo casi debolmente relativistici (il fattore γ è maggiore dell'unità al massimo per qualche percento) perché mi sembra più probabile che in questo limite le diverse modellizzazioni facciano previsioni che stanno tra loro in rapporti semplici.

6.4 Risoluzione numerica del problema delle orbite $\mathcal{RR}2$

Le funzioni (21) nel caso $\mathcal{RR}2$ sono (vedi alla fine della dimostrazione A.10)

$$f(r, \dot{r}) = \frac{r_0^2 v_0^2 (c^2 - \dot{r}^2)}{r [r^2 (c^2 - v_0^2) + r_0^2 v_0^2]} - \frac{\alpha}{r^2} + \frac{\alpha \dot{r}^2}{r^2 c^2} \quad (23a)$$

$$g(r, \dot{r}) = \frac{r_0 v_0}{r} \sqrt{\frac{c^2 - \dot{r}^2}{r^2 (c^2 - v_0^2) + r_0^2 v_0^2}} \quad (23b)$$

$$h(r, \dot{r}) = \frac{\alpha \dot{r} \dot{\theta}}{c^2 r^2} - \frac{2 \dot{r} \dot{\theta}}{r} \quad (23c)$$

Come avveniva con le (22), la penultima va sostituita nell'ultima al posto di $\dot{\theta}$.

Analizzando numericamente il caso $\mathcal{RR}2$ si trova un angolo di precessione che è circa il doppio del caso $\mathcal{RR}$. Si ottiene cioè un angolo di precessione *circa tre volte più piccolo del valore vero*.

$\frac{G_{fittizia}}{G}$	$\frac{c_{fittizia}}{c}$	$\frac{r_{iniziale}}{4,6 \cdot 10^{10}}$	$\frac{v_{iniziale}}{5,9 \cdot 10^4}$	$\frac{\Delta t}{(\text{minuti})}$	$\frac{2 \cdot \text{teorico} \mathcal{RR}}{\text{numerico} \mathcal{RR}2}$
1	0,001	1	1	30	0,957
2	0,001	1	1	10	0,762
1	0,002	1	1	30	0,972
1	0,003	1	1	30	1,040
1	0,001	0,5	1	5	0,762
1	0,001	1	0,5	10	0,702
1	0,0005	1	1	40	0,811
1	0,05	1	1	30	0,058

Questa volta l'ultima colonna è il rapporto tra il *doppio* dell'angolo di precessione previsto teoricamente dalla (15), e l'angolo di precessione ottenuto numericamente (angolo medio tra i due punti in cui $\dot{r}$ cambia segno dopo più di un giro).

I risultati numerici sono un po' meno buoni di quelli ottenuti con il contesto $\mathcal{RR}$. Deviazioni forse significative dall'unità (vedi linee 2, 5 e 6) mi fanno sospettare che il fattore due che ho supposto valga esattamente solo nel caso limite di orbite poco eccentriche. Non ci sono comunque dubbi sul fatto che l'incremento di massa gravitazionale ha nettamente migliorato la stima dell'angolo di precessione (né ci sono dubbi sul fatto che questo ritocco non rappresenta la soluzione completa del problema).

In figura 4 sono riportati i grafici delle orbite della seconda riga delle tabelle dei dati numerici. Si noti che nel caso $\mathcal{RR}2$ la precessione è molto più pronunciata (l'angolo di precessione è circa doppio). In figura 5 sono riportati i moduli di velocità e accelerazione in funzione del tempo. Si osservi in figura 5b la maggiore accelerazione del contesto $\mathcal{RR}2$ rispetto al contesto $\mathcal{RR}$, essa è dovuta all'incremento di massa gravitazionale dovuto alla velocità (e alla minore distanza dall'origine, che comunque ne è una conseguenza).

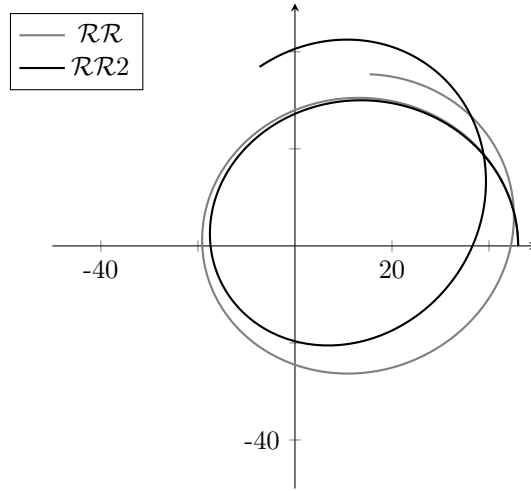


Figura 4. Orbite (ottenute numericamente) in $\mathcal{RR}$ e $\mathcal{RR}2$ nel caso in cui le condizioni iniziali sono quelle di figura 2 a pagina 7, ma con costante di gravitazione raddoppiata e velocità della luce diminuita di un fattore mille rispetto ai valori veri. Sugli assi sono indicati i milioni di chilometri.

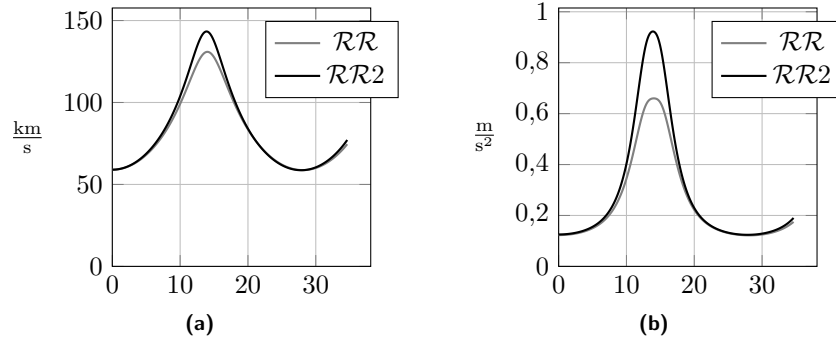


Figura 5. Moduli dei vettori velocità e accelerazione in funzione dei giorni trascorsi nel caso della figura 4 (esito dei calcoli numerici).

■ Appendice dimostrazioni

A.1 Conservazione del momento angolare (classico e relativistico)

Per come abbiamo definito la forza e il momento della forza, abbiamo che

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} \quad (24)$$

Ora osserviamo che

$$\dot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} \quad (25)$$

Il primo termine del secondo membro è scrivibile come $m\mathbf{v} \times \mathbf{v}$ (eventualmente moltiplicato per il fattore γ nel caso relativistico) ed è quindi nullo. Allora, per confronto tra la (25) e la (24), la (2) è dimostrata.

La seconda parte del teorema (in un campo di forze centrali il vettore momento angolare si conserva) discende dalla prima se consideriamo che se la forza è centrale (più in generale possiamo supporre che la forza sia diretta verso il centro, non è necessario escludere che il modulo della forza possa dipendere dalle variabili angolari) $\mathbf{F}$ e $\mathbf{r}$ hanno sempre la stessa direzione e quindi il loro prodotto vettoriale è nullo. La (2) si legge allora $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0}$, che è la tesi.

A.2 Relazione tra forza, velocità e accelerazione in relatività

Svolgendo la derivata nella (3) abbiamo

$$\mathbf{F} = m\gamma\mathbf{a} + m\frac{d\gamma}{dt}\mathbf{v} \quad (26)$$

Scrivendo il v^2 nel fattore γ come $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ e tenendo conto del fatto che $\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$, possiamo scrivere

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} \quad (27)$$

quindi possiamo riscrivere la (26) così

$$m\gamma\mathbf{a} + m\gamma^3\frac{\mathbf{v}}{c^2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{F} \quad (28)$$

Ovvero, moltiplicando scalarmente per $\mathbf{v}$ e considerato che $1 + \gamma^2\frac{v^2}{c^2} = \gamma^2$,

$$m\gamma^3(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (29)$$

che inserita nella (28) permette di riordinare come nella (4).

A.3 Il sistema di equazioni differenziali che regola il moto planetario in meccanica classica

Dalla legge di gravitazione universale $\mathbf{F} = -G\frac{M_\odot m}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ si ottiene

$$\mathbf{a} = -\frac{\alpha}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad (\alpha = GM_\odot) \quad (30)$$

dove $\hat{\mathbf{r}}$ è il versore che indica la posizione.

Il lettore che ha già dimestichezza con le coordinate polari e con la cinematica del punto può saltare alla (34). Chi desiderasse invece vederne la dimostrazione, consideri la figura 6. Come si vede, la relazione tra i versori delle coordinate cartesiane e quelli delle coordinate polari è

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}} \cos \theta + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta \quad (31a)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\mathbf{x}} \sin \theta + \hat{\mathbf{y}} \cos \theta \quad (31b)$$

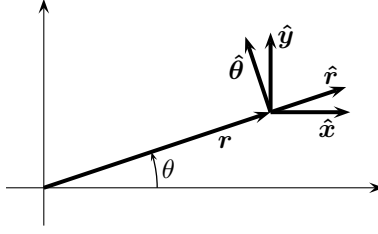


Figura 6. Relazione tra i versori delle coordinate cartesiane e i versori delle coordinate polari.

Da cui, derivando in t ($\hat{x}$ e $\hat{y}$ sono ovviamente vettori costanti),

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta} \hat{\theta} \quad (32a)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta} \hat{r} \quad (32b)$$

Dato che il vettore posizione è $\mathbf{r} = r\hat{r}$, derivando troviamo che il vettore velocità è scrivibile come $\mathbf{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$ da cui, sfruttando la (32a), si ha

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \quad (33)$$

Per l'accelerazione si procede in modo del tutto simile, derivando $\mathbf{v}$ e sfruttando le (32). Ometto i calcoli e scrivo il risultato:

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} \quad (34)$$

Confrontando con la (30) si vede che il sistema di equazioni differenziali che determina il moto è il (5).

A.4 Deduzione classica della forma delle orbite planetarie

A.4.1 Introduzione del vettore $\mathbf{h}$

La (5b) è strettamente connessa con la conservazione del momento angolare. Derivando infatti nel tempo la

$$\mathbf{L} = \text{vettore costante} \quad (35)$$

si trova dopo qualche passaggio (considerato che $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}$ è nullo) che $\hat{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, che con la (34) ci dà la (5b). Essa implica allora la costanza del vettore $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$, che chiameremo $\mathbf{h}$ (e che per l'appunto non è altro che il momento angolare classico diviso per la massa)

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (36)$$

Sfruttando la $\mathbf{r} = r\hat{r}$ e la (33) si ha

$$\mathbf{h} = r^2\dot{\theta}(\hat{r} \times \hat{\theta}) \quad (37)$$

Il modulo di $\mathbf{h}$ è, ovviamente,

$$h = r^2\dot{\theta} \quad (38)$$

A.4.2 Dimostrazione che l'orbita è una conica

Sfruttando la (32a) nella forma $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\dot{\hat{\mathbf{r}}}}{\dot{\theta}}$, la (37) può essere riscritta così

$$\mathbf{h} = r^2 \hat{\mathbf{r}} \times \dot{\hat{\mathbf{r}}} \quad (39)$$

Usandola con la (30) otteniamo (moltiplichiamo vettorialmente i primi membri e i secondi membri)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{h} = -\alpha \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \dot{\hat{\mathbf{r}}}) \quad (40)$$

Sfruttiamo ora l'identità vettoriale

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (41)$$

Considerato che $\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{r}}} = 0$ (la derivata temporale di un vettore che ha modulo costante nel tempo è sempre normale al vettore stesso, infatti se $|\mathbf{V}|$ è costante, anche $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}$ lo è, derivando in t si ha allora $0 = \frac{d(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})}{dt} = 2\dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{V}$) e che $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 1$ si trova

$$\mathbf{a} \times \mathbf{h} = \alpha \dot{\hat{\mathbf{r}}} \quad (42)$$

ovvero

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{h} = \alpha \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} \quad (43)$$

Poiché $\mathbf{h}$ è un vettore costante nel tempo (vedi paragrafo A.4.1), possiamo riscrivere così

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = \frac{d}{dt}(\alpha \hat{\mathbf{r}}) \quad (44)$$

Integrando otteniamo allora

$$\mathbf{v} \times \mathbf{h} = \alpha \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{c} \quad (45)$$

dove $\mathbf{c}$ è un vettore costante nel tempo, che sarà fissato dalle condizioni al contorno. Il valore assunto all'istante zero coinciderà con il valore assunto in qualsiasi altro istante: si avrà quindi necessariamente

$$\mathbf{c} = \mathbf{v}_0 \times \mathbf{h} - \alpha \hat{\mathbf{r}}_0 \quad (46)$$

con ovvio significato del versore $\hat{\mathbf{r}}_0$. Se le condizioni iniziali sono quelle mostrate in figura 1, il vettore $\mathbf{c}$ giacerà quindi sull'asse x (si osservi che la (37) implica che il vettore $\mathbf{h}$ è sempre diretto ortogonalmente al piano dell'orbita). Scriviamo allora la (45) così (faremo successivamente considerazioni sul valore da assegnare a k , che comunque non va interpretato come il “modulo” di $\mathbf{c}$, potendo assumere anche valori negativi, il che ovviamente corrisponde al caso in cui $\mathbf{c}$ è “sdraiato verso la sinistra” dell'asse x .)

$$\mathbf{v} \times \mathbf{h} = \alpha \hat{\mathbf{r}} + k \hat{\mathbf{x}} \quad (47)$$

Moltiplicando scalarmente per $\mathbf{r}$ possiamo riordinare così (θ è l'angolo delle coordinate polari)

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = r(\alpha + k \cos \theta) \quad (48)$$

Ora usiamo l'identità vettoriale

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (49)$$

per scrivere la (48) in questo modo

$$\mathbf{h} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = r(\alpha + k \cos \theta) \quad (50)$$

Osservando la (36), cioè la definizione di $\mathbf{h}$, vediamo che al primo membro c'è h^2 e quindi

$$r(\theta) = \frac{\frac{h^2}{\alpha}}{1 + \frac{k}{\alpha} \cos \theta} \quad (51)$$

Poiché h , α e k sono delle costanti, si tratta proprio dell'equazione di una conica in coordinate polari, solitamente scritta nella forma $r(\theta) = \frac{C}{1+e \cos \theta}$, con e (l'eccentricità) e C costanti.

A.4.3 Determinazione dell'orbita a partire dalle condizioni al contorno

Se le condizioni iniziali sono quelle di figura 1, e più in generale se $\mathbf{r}_0 \perp \mathbf{v}_0$, abbiamo che vicino all'istante zero il moto del punto è caratterizzato da

$$dr = 0 \quad (52a)$$

$$r_0 d\theta = v_0 dt \quad (52b)$$

quindi si ha (la prima per il momento non ci serve, ma ci servirà nel paragrafo 6)

$$\dot{r} = 0 \quad (53a)$$

$$\dot{\theta} = \frac{v_0}{r_0} \quad (53b)$$

Allora la (38) implica che il valore di h all'istante zero (e quindi in qualsiasi altro istante) è

$$h = r_0 v_0 \quad (54)$$

Il che ci permette di riscrivere la (51) così

$$r(\theta) = \frac{\frac{r_0^2 v_0^2}{\alpha}}{1 + \frac{k}{\alpha} \cos \theta} \quad (55)$$

Resta solo da stabilire quale valore è opportuno assegnare a k . Per ipotesi, la posizione iniziale giace sull'asse x “sulla destra”. Imponendo che $r = r_0$ quando $\theta = 0$ nella (55) possiamo allora trovare il valore di k in funzione delle condizioni iniziali

$$k = r_0 v_0^2 - \alpha \quad (56)$$

A questo punto è facile riordinare la (55) nella (6).

A.5 Energia nel contesto $\mathcal{RR}$

A.5.1 Considerazioni sul prodotto scalare tra un vettore e il suo differenziale

Consideriamo la variazione di un vettore dal valore $\mathbf{v}$ al valore $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Dimosteremo ora che se dv è la variazione del modulo del vettore, si ha

$$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = v dv \quad (57)$$

A prima vista può sembrare che questa scrittura sia errata (o meglio valida solo nel caso molto particolare in cui $d\mathbf{v}$ sia diretto come $\mathbf{v}$) ma va osservato che il differenziale $d\mathbf{v}$ che a noi interessa non è il modulo del vettore variazione, bensì la variazione del modulo del vettore. In simboli

$$dv \neq |d\mathbf{v}| \quad (58a)$$

$$dv = d|\mathbf{v}| \quad (58b)$$

Facendo un disegno, è facile convincersi graficamente (figura 7) che, poiché $|d\mathbf{v}| \ll |\mathbf{v}|$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ sono approssimativamente paralleli e si ha

$$d|\mathbf{v}| = |d\mathbf{v}| \cos \theta \quad (59)$$

che con la (58b) dimostra la (57).

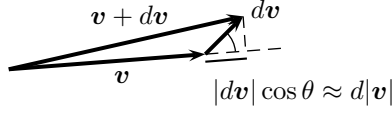


Figura 7. I vettori $\mathbf{v}$, $d\mathbf{v}$ e $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$.

Volendo possiamo dimostrare la (59) analiticamente. Infatti se sommiamo al vettore orizzontale $\mathbf{v} = (v; 0)$ il vettore $\Delta\mathbf{v} = (\Delta v \cos \theta; \Delta v \sin \theta)$ otteniamo con qualche conto che la variazione del modulo è

$$\Delta|\mathbf{v}| = |\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}| - |\mathbf{v}| = \sqrt{v^2 + 2\mathbf{v} \cdot \Delta\mathbf{v} + \Delta v^2} - v \quad (60)$$

Facendo tendere a zero il modulo dell'incremento $\Delta\mathbf{v}$ e sfruttando la $\sqrt{1 + \epsilon} \approx 1 + \frac{\epsilon}{2}$ la (60) diventa la (59).

A.5.2 Dimostrazione della (11)

Da come abbiamo definito l'energia cinetica, possiamo dire che essa corrisponde al lavoro compiuto per accelerare il corpo fino a velocità v . Considerato che $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ questo significa

$$T = \int_0^v \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt \quad (61)$$

La funzione integranda può essere scritta in modo diverso sfruttando la (29):

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = m\gamma^3 \frac{\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}}{dt} \quad (62)$$

Otteniamo allora

$$T = m \int_0^v \gamma^3 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \quad (63)$$

che sfruttando la (57) diventa

$$T = m \int_0^v \frac{v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} dv \quad (64)$$

Il calcolo dell'integrale, con la condizione ($v = 0 \Rightarrow T = 0$), restituisce la (11).

A.6 Deduzione della forma delle orbite in $\mathcal{RR}$

A.6.1 Riscrittura del momento angolare relativistico

In base alla definizione $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ della quantità di moto relativistica, alla definizione (1b) di momento angolare, al vettore posizione scritto nella forma $\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{r}}$ e alla formula (33) della velocità in coordinate polari, si vede che il momento angolare relativistico è scrivibile così:

$$\mathbf{L} = \frac{mr^2 \dot{\theta}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \hat{\mathbf{z}} \quad (65)$$

dove $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}$ (si tratta ovviamente del versore talvolta denotato con $\mathbf{k}$). Vogliamo ora scrivere il modulo L in un modo che ci sarà più utile per determinare la traiettoria dell'orbita. Osserviamo che

$$\dot{r} = \bar{r} \dot{\theta} \quad (66)$$

dove abbiamo introdotto la notazione $\bar{r} = \frac{dr}{d\theta}$. Quindi il modulo quadro della velocità (33)

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \quad (67)$$

è scrivibile così:

$$v^2 = (\bar{r}^2 + r^2) \dot{\theta}^2 \quad (68)$$

Ciò permette di scrivere il modulo del momento angolare in questo modo:

$$L = \frac{mr^2 \dot{\theta}}{\sqrt{1 - \frac{(\bar{r}^2 + r^2) \dot{\theta}^2}{c^2}}} \quad (69)$$

A.6.2 Impostazione dell'equazione differenziale

Dalla (69) otteniamo

$$\dot{\theta}^2 = \frac{1}{\frac{\bar{r}^2 + r^2}{c^2} + \frac{m^2 r^4}{L^2}} \quad (70)$$

Sostituendo nella conservazione dell'energia relativistica, che in base alla (68) può essere scritta così

$$E = V + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{(\bar{r}^2 + r^2)\dot{\theta}^2}{c^2}}} \quad (71)$$

otteniamo, dopo un bel po' di conti,

$$E = V + mc^2 \sqrt{1 + \frac{L^2(\bar{r}^2 + r^2)}{m^2 r^4 c^2}} \quad (72)$$

Riordinando, possiamo concludere che la conservazione dell'energia e del momento angolare portano all'equazione differenziale

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 = \frac{r^4}{L^2 c^2} [(E - V)^2 - m^2 c^4] \quad (73)$$

A questo punto si tratta “solo” di risolverla. Dovremo fare parecchie manipolazioni, ma per il potenziale newtoniano otterremo effettivamente un'orbita a rosetta.

A.6.3 Semplificazione dell'equazione differenziale

Effettuando la sostituzione $u = \frac{1}{r}$ (si noti che $\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta}$) nella (73) e moltiplicando tutto per u^4 otteniamo

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{1}{L^2 c^2} [(E - V)^2 - m^2 c^4] \quad (74)$$

In caso di potenziale newtoniano abbiamo³ $V = \frac{-\alpha m}{r}$ (dove $\alpha = GM_\odot$). Possiamo allora scrivere

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{1}{L^2 c^2} [(E + \alpha m u)^2 - m^2 c^4] \quad (75)$$

Deriviamo in θ

$$2 \frac{du}{d\theta} \frac{d^2 u}{d\theta^2} + 2u \frac{du}{d\theta} = \frac{1}{L^2 c^2} \left[2\alpha^2 m^2 u \frac{du}{d\theta} + 2E\alpha m \frac{du}{d\theta} \right] \quad (76)$$

³Naturalmente in questo contesto avremmo potuto inglobare la massa m nella costante α (in [BA] si fa questa scelta). Per coerenza con le notazioni adottate altrove in questo articolo ho però preferito non farlo.

Dividiamo per $2\frac{du}{d\theta}$ e riordiniamo così

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\alpha m}{L^2 c^2} (E + \alpha m u) \quad (77)$$

Come si può facilmente verificare, la (77) è riscrivibile in questo modo

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + q^2 u = \frac{q^2}{p} \quad (78)$$

dove

$$q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 m^2}{L^2 c^2}} \quad (79a)$$

$$p = \frac{L^2 c^2 - \alpha^2 m^2}{\alpha m E} \quad (79b)$$

Con la sostituzione $w = u - \frac{1}{p}$ si ottiene poi (si noti che $\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{d^2w}{d\theta^2}$ perché p è una costante)

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + q^2 w = 0 \quad (80)$$

A.6.4 Dimostrazione della forma dell'orbita in $\mathcal{RR}$

La soluzione della (80) è naturalmente scrivibile in molti modi diversi. Nel nostro caso il modo migliore è questo:

$$w = A \cos [q(\theta - B)] \quad (81)$$

dove A e B sono costanti arbitrarie. Questo modo di scrivere la soluzione è particolarmente bello se vale la

$$\gamma_0 v_0 r_0 > \frac{\alpha}{c} \quad (82)$$

Infatti se questa disuguaglianza è soddisfatta $q \in \mathbb{R}^+$ (per rendersene conto, si consideri anche l'equazione (90) che come mostrato all'inizio del paragrafo A.6.5 è una conseguenza delle definizioni e delle condizioni iniziali) e la (81) corrisponde a un'ellisse che precessa. Per mostrarlo non ci resta che leggere “alla rovescia” le precedenti sostituzioni $u = w + \frac{1}{p}$ e la $r = \frac{1}{u}$, ottenendo

$$r = \frac{p}{1 + e \cos [q(\theta - B)]} \quad (83)$$

dove abbiamo chiamato e la costante Ap . Poiché vicino all'istante zero $\mathbf{r}_0 \perp \mathbf{v}_0$ si ha

$$\left. \frac{dr}{d\theta} \right|_{t=0} = 0 \quad (84)$$

Derivando la (83) vediamo che, in corrispondenza dell'angolo iniziale $\theta = 0$, la costante B deve allora soddisfare la

$$\sin[q(\theta - B)] = 0 \quad (85)$$

Dunque B deve essere un multiplo di $\frac{\pi}{q}$

$$B = k \frac{\pi}{q} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (86)$$

questa è la condizione da soddisfare se vogliamo che la velocità iniziale sia ortogonale all'asse x . La (83) diventa allora

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(q\theta + k\pi)} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (87)$$

Abbiamo (quasi) fissato una delle due costanti che emergevano dall'equazione differenziale sfruttando l'ortogonalità iniziale tra velocità e vettore posizione. L'altra costante era stata inglobata nella costante e , che può essere fissata dalla posizione iniziale. Imponendo che all'istante zero il pianeta abbia variabili polari $\theta = 0$ e $r = r_0$ si ottiene

$$e = + \left(\frac{p}{r_0} - 1 \right) \quad k \text{ pari o nullo} \quad (88a)$$

$$e = - \left(\frac{p}{r_0} - 1 \right) \quad k \text{ dispari} \quad (88b)$$

Usando la formula di addizione del coseno, la (87) può essere scritta così

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(q\theta)} \quad k \text{ pari o nullo} \quad (89a)$$

$$r = \frac{p}{1 - e \cos(q\theta)} \quad k \text{ dispari} \quad (89b)$$

Sostituendo le (88) nelle (89) si ottiene la (13).

A.6.5 I parametri (14) e le condizioni iniziali

Per via delle condizioni iniziali descritte in figura 1 vale la (53b) e quindi il modulo del momento angolare relativistico (65) è scrivibile così

$$L = \gamma_0 m r_0 v_0 \quad (90)$$

dove ovviamente

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \quad (91)$$

L'energia iniziale (e quindi in qualsiasi altro istante) è, in base alla (12),

$$E = \gamma_0 m c^2 - \frac{\alpha m}{r_0} \quad (92)$$

Sostituendo le (90) e (92) nelle (79) si trovano le (14).

A.7 Dimostrazione dell'entità della precessione in $\mathcal{RR}$

Osservando la (13) vediamo che la distanza è minima quando $\cos(q\theta) = 1$. Questo avviene quando θ è multiplo intero di $\frac{2\pi}{q}$, cioè quando θ assume uno di questi valori

$$\theta_k = \frac{2\pi}{q}k \quad k \in \mathbb{Z} \quad (93)$$

Ogni incremento di k , cioè ogni minimo successivo raggiunto, corrisponde a una rivoluzione attorno al Sole. Quindi la variazione di θ tra un minimo e il successivo è $\theta_{k+1} - \theta_k = \frac{2\pi}{q}$. Sottraendo l'angolo giro otteniamo allora la distanza angolare tra due minimi successivi: $\Delta\theta = 2\pi(q^{-1} - 1)$. Sostituendo la (14a) si trova la (15). La (16) è naturalmente ottenuta dalla (15) sfruttando la $(1 - \epsilon)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{\epsilon}{2}$, valida per ϵ piccolo.

A.8 Le condizioni iniziali perché le orbite siano quasi ellittiche in $\mathcal{RR}$

Osservando la (13) vediamo che il termine $\frac{p}{r_0}$ gioca in questo contesto un ruolo analogo a quello giocato dalla ξ nell'orbita classica (6). Dunque se vogliamo che l'orbita sia “ellittica” e non “iperbolica” (uso le virgolette perché in $\mathcal{RR}$ le orbite non sono delle vere coniche, essendo presente una precessione) deve essere $p < 2r_0$. Possiamo riordinare così

$$\frac{v_0^2 c^4}{c^2 - v_0^2} \cdot r_0^2 - \frac{2\alpha c^3}{\sqrt{c^2 - v_0^2}} \cdot r_0 + \alpha^2 < 0 \quad (94)$$

che ha soluzione (17) (si noti che, poiché $v_0 < c$, il coefficiente $\frac{v_0^2 c^4}{c^2 - v_0^2}$ è positivo).

A.9 Le equazioni differenziali che regolano il moto nei casi $\mathcal{RR}$ e $\mathcal{RR}2$

Cominciamo con l'osservare che la costanza del momento angolare e la (90) implicano che

$$\gamma_0 r_0 v_0 = \gamma r v \quad (95)$$

Da cui possiamo ottenere la velocità in funzione della distanza dal Sole

$$v(r) = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{c^2 r^2}{\gamma_0^2 v_0^2 r_0^2}}} \quad (96)$$

Sostituendo nella $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ otteniamo la (20), cioè il fattore γ in funzione della distanza dal Sole.

Utilizzando la legge di gravitazione universale (9) con la versione (4) della formula di Planck-Minkowski si ottiene

$$\gamma r^2 \mathbf{a} = -\alpha \hat{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \alpha (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}) \quad (97)$$

In coordinate polari valgono le (33) e (34): sostituendole nella (97) si ottiene che deve essere vera la

$$\left(\gamma r^2 \ddot{r} - \gamma r^3 \dot{\theta}^2 + \alpha - \frac{\alpha}{c^2} \dot{r}^2\right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\gamma r^3 \ddot{\theta} + 2\gamma r^2 \dot{r} \dot{\theta} - \frac{\alpha}{c^2} r \dot{\theta}\right) \hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \quad (98)$$

Questo implica che il sistema di equazioni differenziali al quale deve obbedire l'orbita è dato dalla (18).

Nel contesto $\mathcal{RR}2$, le ipotesi portano a scrivere la seguente equazione per la forza

$$\mathbf{F} = -\frac{\alpha \gamma m}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (99)$$

Ciò fa sì che l'analisi sia identica a quella appena svolta, l'unica differenza è che α risulta moltiplicato per γ . Moltiplicando nel sistema (18) otteniamo allora il sistema (19).

A.10 Le funzioni (21) nei casi $\mathcal{RR}$ e $\mathcal{RR}2$

Sostituendo la (67) nella (65) e sfruttando la (90) abbiamo

$$\frac{r^2 \dot{\theta}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}{c^2}}} = \gamma_0 r_0 v_0 \quad (100)$$

da cui possiamo ottenere

$$r^3 \dot{\theta}^2 = \frac{r r_0^2 v_0^2 (c^2 - \dot{r}^2)}{r^2 (c^2 - v_0^2) + r_0^2 v_0^2} \quad (101)$$

Sostituendo nella (18a) si può risolvere rispetto a $\ddot{r}$ ottenendo la (22a). La (101) permette anche di ottenere facilmente la (22b), cioè $\dot{\theta}$, nota la quale è possibile trovare $\ddot{\theta}$ sfruttando la (18b), e dunque di scrivere la (22c).

L'analisi svolta per ottenere le funzioni (21) nel contesto $\mathcal{RR}$ vale anche nel contesto $\mathcal{RR}2$. Come avveniva per il sistema di equazioni differenziali, sarà però necessario moltiplicare α per γ , ottenendo le (23).

Riferimenti bibliografici

- [SP] M. Spiegel (1959). *Vector Analysis*. McGraw-Hill.
- [BA] V. Barone (2004). *Relatività*. Bollati Boringhieri.
- [ME] D. Menzel (1960). *Fundamental Formulas of Physics*. Dover Publications.

1	Introduzione	1
2	Considerazioni iniziali	2
2.1	Conservazione del momento angolare in relatività	2
2.2	Relazione tra forza, velocità e accelerazione in relatività	2
2.3	Analisi classica del moto planetario	3
2.3.1	Soluzione del problema della forma dell'orbita	3
2.3.2	Considerazioni sulla formula delle orbite classiche	3
2.3.3	Considerazioni sul calcolo che restituisce la posizione del pianeta in funzione del tempo	4
3	La precessione del perielio nel contesto $\mathcal{RR}$	4
3.1	Le ipotesi $\mathcal{RR}$	4
3.2	Ipotesi $\mathcal{RR}$ ed energia	5
3.3	Le orbite in $\mathcal{RR}$	6
3.4	La precessione in $\mathcal{RR}$	7
3.5	Orbite quasi ellittiche in $\mathcal{RR}$	8
4	Il contesto $\mathcal{RR}2$	8
5	I sistemi di equazioni differenziali che determinano le orbite in $\mathcal{RR}$ e $\mathcal{RR}2$	8
6	Approcci numerici in $\mathcal{RR}$ e $\mathcal{RR}2$	9
6.1	Considerazioni generali	9
6.2	Considerazioni sulla risoluzione numerica delle orbite $\mathcal{RR}$	10
6.3	Risoluzione numerica del problema delle orbite $\mathcal{RR}$	10
6.4	Risoluzione numerica del problema delle orbite $\mathcal{RR}2$	12
	Appendice dimostrazioni	13
A.1	Conservazione del momento angolare (classico e relativistico)	13
A.2	Relazione tra forza, velocità e accelerazione in relatività	14
A.3	Il sistema di equazioni differenziali che regola il moto planetario in meccanica classica	14
A.4	Deduzione classica della forma delle orbite planetarie	15
A.4.1	Introduzione del vettore h	15

A.4.2	Dimostrazione che l'orbita è una conica	16
A.4.3	Determinazione dell'orbita a partire dalle condizioni al contorno	17
A.5	Energia nel contesto $\mathcal{RR}$	18
A.5.1	Considerazioni sul prodotto scalare tra un vettore e il suo differenziale	18
A.5.2	Dimostrazione della (11)	18
A.6	Deduzione della forma delle orbite in $\mathcal{RR}$	19
A.6.1	Riscrittura del momento angolare relativistico	19
A.6.2	Impostazione dell'equazione differenziale	20
A.6.3	Semplificazione dell'equazione differenziale	20
A.6.4	Dimostrazione della forma dell'orbita in $\mathcal{RR}$	21
A.6.5	I parametri (14) e le condizioni iniziali	22
A.7	Dimostrazione dell'entità della precessione in $\mathcal{RR}$	23
A.8	Le condizioni iniziali perché le orbite siano quasi ellittiche in $\mathcal{RR}$	23
A.9	Le equazioni differenziali che regolano il moto nei casi $\mathcal{RR}$ e $\mathcal{RR}2$	23
A.10	Le funzioni (21) nei casi $\mathcal{RR}$ e $\mathcal{RR}2$	24

