

# Studio relativistico dei problemi quantistici e formalismo di Schrödinger

Fausto Vezzaro  
sitofausto@gmail.com

6 agosto 2014

## Sommario

L'equazione di Schrödinger è stata concepita per essere applicata a sistemi non relativistici. I sistemi relativistici vengono analizzati facendo uso di formalismi del tutto differenti, che risultano ancora più complicati e astratti. In questo articolo mi propongo di affrontare il problema relativistico conservando il formalismo di Schrödinger, per mezzo di una generalizzazione della sua equazione (Equazione 34 a pagina 5). Ho provato ad applicare l'equazione a vari problemi: nel caso delle buche sono riuscito a portare a termine i conti e la correttezza dell'equazione è stata confermata. Ho individuato l'equazione in letteratura (vedi paragrafo 1.3.2)

## 1 Un approccio meno astratto ai problemi quantistici e relativistici

### 1.1 Particella debolmente relativistica

#### 1.1.1 Una formulazione debolmente relativistica dell'equazione di Schrödinger

Dalla relatività sappiamo che possiamo esprimere l'energia cinetica come differenza tra l'energia relativistica totale e l'energia a riposo

$$K = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 \quad (1)$$

e dunque

$$K = mc^2 (\sqrt{\varepsilon + 1} - 1) \quad \text{dove} \quad \varepsilon = \frac{p^2}{m^2 c^2} \quad (2)$$

ma per  $\varepsilon$  piccolo vale l'approssimazione  $\sqrt{\varepsilon + 1} - 1 \approx \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8}$  quindi per piccole energie cinetiche la correzione relativistica al primo ordine è

$$K = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} \quad (3)$$

e quindi, utilizzando le relazioni di de Broglie,

$$E = \hbar\omega \quad (4a)$$

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \quad (4b)$$

possiamo simbolicamente scrivere la conservazione dell'energia meccanica  $K + U = E$  così

$$\frac{\hbar^2}{2m}k^2 - \frac{\hbar^4}{8m^3c^2}k^4 + U = \hbar\omega \quad (5)$$

dove  $k = |\mathbf{k}|$ . Ora osserviamo che data una generica onda sinusoidale

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \phi)} \quad (6)$$

valgono le

$$\dot{\Psi} = -i\omega\Psi \quad (7)$$

$$\nabla^2\Psi = -k^2\Psi \quad (8)$$

da quest'ultima vediamo poi che

$$\nabla^4\Psi = k^4\Psi \quad (9)$$

dove si è utilizzato l'operatore biarmonico  $\nabla^4\Psi \equiv \nabla^2(\nabla^2\Psi)$ . Moltiplicando la (5) per  $\Psi$  potremmo allora aspettarci che l'equazione che regola il comportamento della funzione d'onda in regime debolmente relativistico sia del tutto analoga a quella che abbiamo in regime non relativistico

$$\boxed{\hat{A}\Psi = i\hbar\dot{\Psi}} \quad (10)$$

l'unica differenza è che vi è un termine correttivo nell'operatore hamiltoniano

$$\boxed{\hat{A} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{\hbar^4}{8m^3c^2}\nabla^4 + U} \quad (11)$$

che si riduce all'ordinario operatore  $\hat{H}$  se  $c \rightarrow \infty$ .

### 1.1.2 Una formulazione indipendente dal tempo

Consideriamo una soluzione a variabili separabili  $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})f(t)$ , sostituendo nella (10) e dividendo per la soluzione stessa otteniamo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2\psi}{\psi} - \frac{\hbar^4}{8m^3c^2}\frac{\nabla^4\psi}{\psi} + U = i\hbar\frac{\dot{f}}{f} \quad (12)$$

Se il potenziale è stazionario possiamo eguagliare i due membri a una costante  $C$ . La seconda equazione

$$i\hbar\dot{f} = Cf \quad (13)$$

restituisce

$$f(t) \propto e^{-\frac{iCt}{\hbar}} \quad (14)$$

la quale mostra che la distribuzione di probabilità  $|\Psi|^2$  è stazionaria ed uguale a  $|\psi|^2$  opportunamente normalizzato. La  $\Psi$  va allora calcolata per mezzo della

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi - \frac{\hbar^4}{8m^3c^2}\nabla^4\Psi + U\Psi = C\Psi \quad (15)$$

Sostituendo la generica onda sinusoidale (6), usando le relazioni di de Broglie e dividendo per  $\Psi$  vediamo che

$$\frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + U = C \quad (16)$$

Queste manipolazioni portano a ipotizzare che la costante  $C$  coincida con l'energia meccanica totale della particella. Concludendo, ciò che abbiamo trovato per l'equazione di Schrödinger debolmente relativistica dipendente dal tempo vale anche per gli stati stazionari: l'equazione è del tutto analoga a quella relativa al regime non relativistico

$$\boxed{\hat{A}\Psi = E\Psi} \quad (17)$$

ed occorre solo tenere conto della piccola modifica all'operatore hamiltoniano (che però rende l'equazione assai più complicata).

## 1.2 Particella ultrarelativistica

### 1.2.1 Una formulazione ultrarelativistica dell'equazione di Schrödinger

Per scrivere una versione ultrarelativistica dell'equazione di Schrödinger procederemo in modo analogo a quanto fatto nei paragrafi precedenti, ma il fatto che nell'equazione di conservazione dell'energia la quantità di moto non appare al quadrato crea delle difficoltà che risolveremo come segue.

La conservazione dell'energia è

$$E = pc + U \quad (18)$$

Per pervenire a una comoda versione dell'equazione di Schrödinger ultrarelativistica è conveniente portare la  $U$  a sinistra ed elevare al quadrato (il fatto che eleviamo al quadrato ci deve però mettere in guardia sulla possibilità di ottenere a soluzioni spurie). Applicando le relazioni di de Broglie possiamo allora ottenere

$$\hbar^2\omega^2\Psi + U^2\Psi - 2\hbar\omega U\Psi = c^2\hbar^2k^2\Psi \quad (19)$$

dove abbiamo anche moltiplicato per  $\Psi$ . Si consideri ora la seguente equazione

$$\boxed{c^2 \hbar^2 \nabla^2 \Psi = \hbar^2 \ddot{\Psi} + 2iU\hbar \dot{\Psi} - U^2 \Psi} \quad (20)$$

Sostituendovi la generica onda sinusoidale (6) e sfruttando la seguente conseguenza della (7)

$$\ddot{\Psi} = -\omega^2 \Psi \quad (21)$$

si ottiene la (19), ovvero la conservazione dell'energia. Notiamo che se  $U = 0$  la (20) si riduce all'equazione delle onde elettromagnetiche  $\square^2 \Psi = 0$ : il pacchetto semplicemente viaggia a velocità  $c$  in moto rettilineo uniforme. È ben vero che  $U$  è definita a meno di una costante additiva arbitraria (ciò rende l'ultima affermazione apparentemente priva di senso), tuttavia credo che nel contesto della particella libera possa essere utile definire una energia potenziale assoluta come energia a riposo della particella<sup>1</sup>. In proposito si vedano anche i commenti alla (34).

### 1.2.2 Una formulazione indipendente dal tempo

Consideriamo una soluzione a variabili separabili  $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})f(t)$ , sostituendo nella (20) otteniamo

$$c^2 \hbar^2 f \nabla^2 \psi = \hbar^2 \psi \ddot{f} + 2iU\hbar \psi \dot{f} - U^2 \psi f \quad (22)$$

dividiamo per  $f\psi$

$$c^2 \hbar^2 \frac{\nabla^2 \psi}{\psi} = \hbar^2 \frac{\ddot{f}}{f} + 2iU\hbar \frac{\dot{f}}{f} - U^2 \quad (23)$$

Se  $\frac{\dot{f}}{f}$  è una costante indipendente dal tempo<sup>2</sup> possiamo separare in due parti, l'una dipendente solo dallo spazio e l'altra solo dal tempo (se il potenziale è stazionario)

$$c^2 \hbar^2 \frac{\nabla^2 \psi}{\psi} - 2iU\hbar \frac{\dot{f}}{f} + U^2 = \hbar^2 \frac{\ddot{f}}{f} \quad (24)$$

eguagliamo allora, senza perdita di generalità, a una costante  $Z^2$ . La seconda equazione diventa

$$\ddot{f} = \frac{Z^2}{\hbar^2} f \quad (25)$$

che ha soluzione

$$f(t) = Ae^{\frac{Z}{\hbar}t} + Be^{-\frac{Z}{\hbar}t} \quad (26)$$

<sup>1</sup>Per coerenza, nel contesto dei sistemi a più particelle, si potrebbe stabilire che l'energia potenziale sia pari alla somma di tutte le energie a riposo quando le particelle del sistema sono distribuite a grande distanza fra loro (e subisca poi le opportune variazioni quando il sistema viene assemblato).

<sup>2</sup>In presenza di soluzioni a variabili separabili, nel paragrafo (1.1), questa era una conseguenza della stazionarietà del potenziale, qui invece è una premessa per rendere stazionario  $|\Psi|^2$ , la "dimostrazione" è più debole.

Ma dobbiamo scegliere uno solo dei due (uno qualunque) o non viene soddisfatta la condizione  $\frac{\dot{f}}{f} = \text{costante}$ . Avremo allora

$$\frac{\dot{f}}{f} = \pm \frac{Z}{\hbar} \quad (27)$$

dove si ha il segno superiore se si sceglie l'esponente positivo e il segno inferiore se si sceglie quello negativo. Sostituendo in (24) troviamo

$$c^2 \hbar^2 \frac{\nabla^2 \psi}{\psi} \mp 2iUZ + U^2 = Z^2 \quad (28)$$

che può essere riscritta anche così

$$-c^2 \hbar^2 \nabla^2 \psi = (\pm iZ - U)^2 \psi \quad (29)$$

Se vi inseriamo la generica onda (6) e applichiamo la relazione di de Broglie otteniamo una relazione da confrontarsi con il quadrato della conservazione dell'energia  $p^2 c^2 = (E - U)^2$

$$p^2 c^2 = (\pm iZ - U)^2 \quad (30)$$

Possiamo trarre le seguenti conclusioni. Se prendiamo il segno superiore (dobbiamo allora prendere il primo esponenziale nella e nella (26)) abbiamo  $Z = -iE$ . Se utilizziamo il segno inferiore (secondo esponenziale) abbiamo  $Z = iE$ . In ogni caso otteniamo una funzione del tipo

$$f(t) = Ae^{-\frac{iEt}{\hbar}} \quad (31)$$

dal che concludiamo  $|\Psi|^2$  è stazionario. Possiamo a questo punto scrivere l'equazione di Schrödinger ultrarelativistica in caso stazionario sostituendo i possibili valori di  $Z$  nella (29) (o equivalentemente sostituendo la (31) nella (24))

$$\boxed{-c^2 \hbar^2 \nabla^2 \Psi = (E - U)^2 \Psi} \quad (32)$$

### 1.3 Formulazione generale

#### 1.3.1 L'equazione di Schrödinger relativistica

Procedendo con i metodi descritti in questo articolo, considerato che l'energia che viene associata alla frequenza è la somma di cinetica e potenziale:

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} - mc^2 + U \quad (33)$$

siamo portati a concludere che la versione relativisticamente esatta dell'equazione di Schrödinger è

$$\boxed{c^2 \hbar^2 \nabla^2 \Psi = \hbar^2 \ddot{\Psi} + 2i\hbar(U - mc^2)\dot{\Psi} + U(2mc^2 - U)\Psi} \quad (34)$$

Si può dire che praticamente tutto quello che viene trattato in questo articolo affonda le sue radici in questa equazione.

Per ottenerla è sufficiente isolare la radice nella conservazione dell'energia, elevare al quadrato (non mi occuperò del problema delle soluzioni spurie né qui né nel resto dell'articolo), sfruttare le relazioni di de Broglie, moltiplicare per  $\Psi$  e procedere nel solito modo.

Naturalmente nei limiti non relativistico e relativistico estremo l'equazione si riduce all'ordinaria equazione di Schrödinger e alla (20). Inoltre se per la particella libera imponiamo che l'energia potenziale coincida con l'energia a riposo ( $U = mc^2$ ), otteniamo l'equazione di Klein-Gordon:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \nabla^2 \Psi = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \Psi \quad (35)$$

Per ottenere la versione indipendente dal tempo, si può poi procedere in modo del tutto analogo a quanto fatto nel paragrafo 1.2.2: sostituiamo nella (34) una soluzione a variabili separabili e dividiamo per la stessa, isoliamo i termini supponendo che  $\frac{\dot{f}}{f}$  sia una costante, traiamo tutte le conclusioni fino all'equazione (27), che andiamo a sostituire ottenendo

$$-c^2 \hbar^2 \nabla^2 \Psi = [-Z^2 \pm 2i(mc^2 - U)Z + U(U - 2mc^2)]\Psi \quad (36)$$

Inserendo la generica onda e applicando le (4) troviamo allora un'equazione che, confrontata con la  $c^2 p^2 = U^2 + E^2 - 2mc^2 U + 2mc^2 E - 2UE$  che discende dalla conservazione dell'energia, ci porta a concludere che deve essere

$$E^2 + 2mc^2 E - 2UE = -Z^2 \pm 2imc^2 Z \mp 2iUZ \quad (37)$$

dove  $E$  è l'energia meccanica totale. Possiamo poi trarre esattamente le conclusioni riportate dopo l'equazione (30) pervenendo, in modo analogo, alla formulazione indipendente dal tempo (che nei casi limite si comporta come ci si attende)

$$\boxed{-c^2 \hbar^2 \nabla^2 \Psi = [U^2 - 2(E + mc^2)U + E^2 + 2Emc^2]\Psi} \quad (38)$$

### 1.3.2 L'equazione di Schrödinger relativistica in letteratura

La (34) compare in letteratura: dove si parla di particelle a spin nullo si può trovare l'equazione di Klein-Gordon scritta in questa forma (si consulti [WA, pag. 42])

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - V(z)\right)^2 \phi(z, t) + \left(c^2 \hbar^2 \frac{d^2}{dz^2} - m_0^2 c^4\right) \phi(z, t) = 0 \quad (39)$$

dove

- Siamo ovviamente nel caso monodimensionale;

- L'elevamento a quadrato va interpretato applicando due volte l'operatore contenuto nelle tonde (si otterrà ad esempio una derivata seconda);
- Viene chiamata  $m_0$  la massa della particella, mentre io la chiamo semplicemente  $m$ . Inoltre viene chiamata  $\phi$  la funzione d'onda;
- La sua energia potenziale è uguale alla mia energia potenziale meno l'energia a riposo ( $V = U - mc^2$ , entrambe le scelte sono ovviamente legittime).

Se si tiene conto di tutte queste cose, si può constatare che la 39 coincide con la 34. Da tutto ciò intuisco che la 34 non è altro che l'equazione di Klein-Gordon, anche se non l'ho mai trovata scritta in questa forma (l'unico caso in cui l'ho trovata scritta in modo simile, è appunto quello che ho appena citato).

#### 1.4 Stati stazionari

Il teorema seguente, costituito dalla doppia implicazione riquadrata, permette di vedere sotto una luce nuova i conti svolti nei paragrafi precedenti, e forse anche semplificarli un poco:

$$(|\Psi|^2 \text{ stazionario}) \Leftrightarrow \left( \Psi = \psi e^{Ct} \begin{array}{l} \text{dove } \psi \text{ è una funzione indipen-} \\ \text{dente dal tempo e } C \text{ è una co-} \\ \text{stante puramente immaginaria.} \end{array} \right) \quad (40)$$

la quale tra le altre cose implica che gli stati stazionari *devono* essere descritti da funzioni d'onda a variabili separabili. Riscriviamo in questo modo equivalente

$$(|\Psi|^2 \text{ stazionario}) \Leftrightarrow (\dot{\Psi} = C\Psi \text{ con } C \text{ immaginario puro}) \quad (41)$$

Per mostrare l'implicazione diretta riscriviamo l'ipotesi

$$\frac{d}{dt}|\Psi|^2 = \dot{\Psi}^*\Psi + \Psi^*\dot{\Psi} = 0 \quad (42)$$

in questo modo

$$\frac{\dot{\Psi}}{\Psi} = - \left( \frac{\dot{\Psi}}{\Psi} \right)^* \quad (43)$$

il che implica la tesi:  $\frac{\dot{\Psi}}{\Psi}$  è immaginario puro. Per mostrare l'implicazione inversa, sfruttiamo l'ipotesi  $\dot{\Psi} = C\Psi$  per scrivere  $\frac{d}{dt}|\Psi|^2$  in questo modo

$$\frac{d}{dt}|\Psi|^2 = \Psi^*\Psi(C^* + C) \quad (44)$$

Per ipotesi  $C$  è immaginario puro, quindi la stazionarietà di  $|\Psi|^2$  è dimostrata.

## 1.5 Particelle molto leggere

Uno dei casi fisicamente più interessanti, per quanto riguarda lo studio del comportamento relativistico della particella quantistica, è naturalmente quello di particelle molto leggere “orbitanti” attorno a una particella molto massiva. Se  $p \gg mc$ , la (33) si riduce alla

$$E = pc + \frac{m^2 c^3}{2p} - mc^2 + U \quad (45)$$

Moltiplichiamo per  $p$  e riordiniamo così

$$(E + mc^2 - U)p = p^2 c + \frac{m^2 c^3}{2} \quad (46)$$

Elevando al quadrato è possibile (uso un metodo un po' più sbrigativo di quello che ho utilizzato prima, ovvero uso solo la  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ ) ricondursi alla seguente equazione valida per gli stati stazionari

$$\boxed{c^2 \hbar^4 \nabla^4 \Psi + [(E + mc^2 - U)^2 - m^2 c^4] \hbar^2 \nabla^2 \Psi + \frac{m^4 c^6}{4} \Psi = 0} \quad (47)$$

Al limite  $m \rightarrow 0$  otteniamo l'equazione (32) con il laplaciano applicato a entrambi i membri. Ad ogni modo, l'equazione (47) appare più complicata dell'equazione relativistica esatta: non mi ci soffermerò ulteriormente.

## 2 Problemi che ho risolto

### 2.1 La buca sferica infinita

Sostituendo nell'equazione esatta (38) una funzione a variabili separabili, e supponendo che il potenziale sia centrale, si trova (con passaggi completamente analoghi a quelli dello studio del caso non relativistico) che la parte angolare delle soluzioni è data dalle armoniche sferiche e che la parte radiale deve soddisfare l'equazione differenziale ( $l \in \mathbb{Z}$ )

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{[U^2 - 2(E + mc^2)U + E^2 + 2Emc^2]r^2}{c^2 \hbar^2} - l(l+1) = 0 \quad (48)$$

ovvero

$$r^2 R'' + 2r R' + \left\{ \frac{[U^2 - 2(E + mc^2)U + E^2 + 2Emc^2]r^2}{c^2 \hbar^2} - l(l+1) \right\} R = 0 \quad (49)$$

La (49) costituisce un risultato interessante, valido per qualsiasi potenziale centrale, cominciamo ad applicarla al caso della buca sferica infinita.

Poniamo

$$U(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < a \\ +\infty & \text{se } r > a \end{cases} \quad (50)$$



Ponendo  $U = 0$  e sostituendo  $R = \frac{u}{r}$  si ottiene un'equazione completamente analoga a quella che si ottiene nel caso non relativistico

$$u'' = \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} - k^2 \right] u \quad (51)$$

con la differenza che  $k$  è la costante

$$k = \frac{\sqrt{E^2 + 2Emc^2}}{\hbar c} \quad (52)$$

Per  $c$  grande ci si riduce al caso non relativistico. In una regione dove abbiamo posto  $U = 0$ , la somma di energia cinetica ed energia potenziale non può che essere positiva. La positività di  $E$  implica quella di  $k$ .

Nel caso  $l = 0$  (la funzione d'onda possiede simmetria sferica) l'equazione (51) ha soluzione

$$u = A \sin(kr) + B \cos(kr) \quad (53)$$

Quindi

$$R = \frac{A \sin(kr)}{r} + \frac{B \cos(kr)}{r} \quad (54)$$

Se vogliamo che la funzione d'onda sia finita in tutto lo spazio<sup>3</sup> dobbiamo porre  $B = 0$ . La funzione d'onda non può subire discontinuità ed è assente nella regione esterna, quindi le condizioni al contorno impongono

$$\sin(ka) = 0 \quad \Rightarrow \quad ka = n\pi \quad (55)$$

Sostituendo  $k$  otteniamo un'equazione di secondo grado che ha soluzione

$$E = -mc^2 \pm \sqrt{(mc^2)^2 + \left( \frac{n\pi\hbar c}{a} \right)^2} \quad (56)$$

Abbiamo già osservato che  $E > 0$ . Scartando allora la soluzione spuria concludiamo che se una particella di massa  $m$  è confinata in una regione sferica di raggio  $a$  (nella quale abbiamo assegnato energia potenziale nulla), e se consideriamo solo stati dotati di simmetria sferica con funzione d'onda finita ovunque, l'energia relativistica totale è data dall'espressione (aggiungiamo l'energia a riposo della particella)

$$E_{\text{TOT}} = \sqrt{(mc^2)^2 + \left( \frac{n\pi\hbar c}{a} \right)^2} \quad (57)$$

Questa formula è equivalente alla richiesta che la lunghezza d'onda degli stati stazionari sia sottomultipla del diametro della sfera<sup>4</sup>.

Se ci portiamo nel limite

$$\frac{n}{am} \ll \frac{2c}{h} \approx 10^{42} \quad (58)$$

<sup>3</sup>Il divergere della funzione d'onda nell'origine, in realtà, non compromette la normalizzabilità. Tuttavia escluderemo qui, senza una giustificazione, il caso in cui la funzione d'onda assume valori infiniti.

<sup>4</sup> $\lambda = \frac{2a}{n}$  implica  $p = \frac{n\hbar}{2a}$ , che con la formula fondamentale della dinamica relativistica ci restituisce la (57).

e sottraiamo l'energia a riposo, otteniamo l'energia cinetica prevista nel caso non relativistico (si confronti con [GR, Eq. 4.43])

$$E_{\kappa} = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2} \quad (59)$$

Possiamo osservare che una particella di massa molto minore di  $\tilde{m} = \frac{\hbar}{2ac}$  confinata in una sfera (di massa trascurabile) di raggio  $a$ , darebbe luogo a una particella di massa pari a  $\tilde{m}$  stessa (o a un suo multiplo), dunque inversamente proporzionale dal raggio della regione di confinamento<sup>5</sup>. In particolare, una particella con massa nulla o molto minore di quella di un nucleone, confinata allo stato fondamentale in una regione delle dimensioni di un nucleone, darebbe luogo a una massa dell'ordine di quella di un nucleone.

## 2.2 Buca monodimensionale finita

Consideriamo una buca finita larga  $2a$  e profonda  $V_0$ :

$$U(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{se } -a < x < a \\ 0 & \text{se } |x| > a \end{cases} \quad (60)$$

All'interno della buca  $U = -V_0$  quindi la (38) (in versione monodimensionale) ci dà

$$\Psi'' = -l^2 \Psi \quad l = \frac{\sqrt{V_0^2 + 2(E + mc^2)V_0 + E^2 + 2Emc^2}}{c\hbar} \quad (61)$$

Se  $E > -V_0$  (cosa che avviene sempre perché l'energia totale deve essere maggiore della minima energia potenziale) si ha  $l \in \mathbb{R}^+$ . È allora conveniente scrivere la soluzione della (61) semplicemente così

$$\Psi = A \sin(lx) + B \cos(lx) \quad (62)$$

Nella regione esterna abbiamo invece

$$\Psi'' = k^2 \Psi \quad k = \frac{\sqrt{-E(E + 2mc^2)}}{c\hbar} \quad (63)$$

se  $-2mc^2 < E < 0$ ,  $k \in \mathbb{R}^+$ . In caso contrario la funzione d'onda all'esterno è sinusoidale e la normalizzazione è impossibile. Non sorprende che il sistema non possa essere stazionario e normalizzabile se  $E > 0$ , ma trovo interessante che  $E < -2mc^2$  renda impossibile la normalizzazione di un sistema stazionario. Questo può significare semplicemente che stati con energia minore di  $-2mc^2$  sono impossibili a prescindere dalla profondità della buca, oppure che in questi casi si verifica un confinamento totale: la buca finita si comporta come una buca infinita (sembra una possibilità più sensata). Noi ora supporremo di essere nel

---

<sup>5</sup>Questa proporzionalità tra energia (minima) e inverso del raggio, per una particella nel limite relativistico estremo confinata in una sfera, può essere rozzamente dedotta anche dal principio di indeterminazione (si ottiene un'incertezza sulla massa dell'ordine di  $\tilde{m}$ ).

caso  $-2mc^2 < E < 0$ . La soluzione della (63) è data dalla somma di questi due esponenziali reali:

$$\Psi = Ce^{kx} + De^{-kx} \quad (64)$$

chiaramente in ciascuno dei due semiassi andrà preso solo uno di questi due termini: quello che consente la normalizzazione.

A questo punto il problema è formalmente identico a quello non relativistico (a parte le espressioni più generali per  $l$  e  $k$ ). Inoltre, come nel caso non relativistico, sappiamo che la funzione d'onda dovrà essere o pari o dispari (il potenziale è pari quindi per questioni di simmetria dovrà esserlo anche  $|\psi|^2$ ). Concentriamoci sul caso di funzioni d'onda pari. Come nel caso non relativistico abbiamo che l'equazione trascendente che caratterizza l'energia è

$$\tan(la) = \frac{k}{l} \quad (65)$$

ovvero, scrivendo tutto per esteso,

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{a}{\hbar c}\sqrt{V_0^2 + 2(E + mc^2)V_0 + E(E + 2mc^2)}\right) = \\ = \sqrt{\frac{-E(E + 2mc^2)}{V_0^2 + 2(E + mc^2)V_0 + E(E + 2mc^2)}} \end{aligned} \quad (66)$$

Come sempre, se la velocità della luce può essere considerata infinitamente grande, ci ritroviamo nel caso non relativistico (si veda [GR, Eq. 2.154]).

Il caso della buca monodimensionale relativistica finita è poco trattato in letteratura. Per la particella a spin nullo ho trovato solo [WA, pag. 65, caso 2a], dove si perviene all'equazione (valida per funzioni d'onda pari)

$$\tan\left(\frac{a}{\hbar c}\sqrt{E^2 - m^2c^4}\right) = \sqrt{\frac{m^2c^4 - (E - V_0)^2}{E^2 - m^2c^4}} \quad (67)$$

Sembra molto diversa dalla (66), ma teniamo conto del fatto che nel caso in questione  $E$  è l'energia relativistica totale, e che la sua buca è "spostata" in alto di  $V_0$  (ha il potenziale nullo al centro). Dobbiamo allora sostituire la  $E$  dell'equazione (67) con  $E + mc^2 + V_0$ . Ciò porta all'equivalenza delle due espressioni.

In caso di particelle a spin non nullo, le equazioni che ho trovato in letteratura sono un po' diverse da quelle appena ottenute (vedi ad esempio [WA, pag. 163]). Coincidono con queste ultime solo nel caso limite non relativistico. Poiché la teoria di Dirac spiega accuratamente i dati spettrali, devo concludere che, senza qualche modifica, l'approccio alla meccanica quantistica relativistica sviluppato in questo articolo non può funzionare con particelle a spin non nullo.

### 3 Problemi che non ho risolto

#### 3.1 Potenziale coulombiano

Consideriamo una particella con carica elementare  $e$  legata elettricamente a un'altra particella, molto più massiva, con carica opposta. Il potenziale coulombiano è centrale, quindi la parte angolare della funzione d'onda è data dalle armoniche sferiche (vedi inizio del paragrafo 2.1 a pagina 8). Se sostituiamo  $U = \frac{F}{r}$  e operiamo la sostituzione  $R = \frac{y}{r}$  nell'equazione (49) otteniamo l'equazione differenziale

$$r^2 y'' + (Cr^2 + Dr + B)y = 0 \quad (68)$$

dove

$$C = \frac{E^2 + 2Emc^2}{c^2 \hbar^2} \quad (69)$$

$$D = \frac{-2(E + mc^2)F}{c^2 \hbar^2} \quad (70)$$

$$B = \frac{F^2}{c^2 \hbar^2} - l(l + 1) \quad (71)$$

Al posto della variabile  $r$ , introduciamo la variabile adimensionale  $\rho$  così definita

$$\rho = \frac{\sqrt{E(E + 2mc^2)}}{i\hbar c} r \quad (72)$$

Dividiamo poi per  $\rho^2$  e, poiché per ipotesi il prodotto delle cariche è  $-e^2$ , sostituiamo  $F = -c\hbar\alpha$  dove  $\alpha$  è la costante di struttura fine  $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$ . Possiamo riordinare così

$$y'' = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{l(l + 1) - \alpha^2}{\rho^2}\right) y \quad (73)$$

dove si deriva rispetto a  $\rho$  e dove (supporremo  $-2mc^2 < E < 0$ )

$$\rho_0 = \frac{2\alpha(E + mc^2)}{\sqrt{-E(E + 2mc^2)}} \quad (74)$$

Nel limite  $c \rightarrow \infty$  la (73) si riduce all'equazione non relativistica per l'atomo d'idrogeno (si confronti con [GR, Eq. 4.56]). Saremmo tentati di affermare che la (73) ci permette di ricavare i dati spettrali relativisticamente esatti per l'atomo d'idrogeno. Alla luce di quanto scritto alla fine del paragrafo 2.2, sembra invece più sensato pensare di applicare una trattazione di questo tipo allo studio dei livelli energetici di sistemi analoghi, per i quali (a) la particella orbitante abbia spin nullo e (b) il legame sia essenzialmente solo di natura elettrica. Non mi risulta che la natura metta a disposizione sistemi che posseggono entrambi questi requisiti, e che dunque consentano una verifica sperimentale relativamente comoda.

### 3.2 Oscillatore armonico

Sostituendo  $U = \frac{1}{2}kx^2$  nella versione monodimensionale della (38), otteniamo

$$\Psi'' = -\frac{k^2}{4c^2\hbar^2} \left[ x^4 - \frac{4(E + mc^2)}{k}x^2 + \frac{4E(E + 2mc^2)}{k^2} \right] \Psi \quad (75)$$

con condizione di normalizzazione  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dx = 1$ . Chiaramente si ottiene il limite non relativistico se  $c$  è grande (si confronti con [GR, Eq. 2.44]). L'equazione può essere forse resa più bella introducendo il parametro adimensionale  $u$  e la costante dimensionale  $s$  così definiti

$$x = \frac{\sqrt{u}}{s} \quad \text{dove} \quad s = \sqrt[3]{\frac{k}{4\hbar c}} \quad (76)$$

Si ottiene

$$u \frac{d^2 \Psi}{du^2} + \frac{1}{2} \frac{d\Psi}{du} + (u^2 + Au + B)\Psi = 0 \quad (77)$$

dove si suppone di essere nella regione delle  $u$  positive e dove sono stati introdotti i parametri adimensionali

$$\begin{aligned} A &= \frac{-4(E + mc^2)}{k} \cdot s^2 \\ B &= \frac{4E(E + 2mc^2)}{k^2} \cdot s^4 \end{aligned} \quad (78)$$

La condizione di normalizzazione è ora  $\int_0^{+\infty} \frac{|\Psi|^2}{\sqrt{u}} du = s$  ( $\Psi$  è pari o dispari).

## Riferimenti bibliografici

- [GR] David J. Griffiths (2005). *Introduzione alla meccanica quantistica*. Casa Editrice Ambrosiana.
- [WA] Armin Wachter (2011). *Relativistic Quantum Mechanics*. Springer.

# Indice

|          |                                                                                   |           |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Un approccio meno astratto ai problemi quantistici e relativistici</b>         | <b>1</b>  |
| 1.1      | Particella debolmente relativistica . . . . .                                     | 1         |
| 1.1.1    | Una formulazione debolmente relativistica dell'equazione di Schrödinger . . . . . | 1         |
| 1.1.2    | Una formulazione indipendente dal tempo . . . . .                                 | 2         |
| 1.2      | Particella ultrarelativistica . . . . .                                           | 3         |
| 1.2.1    | Una formulazione ultrarelativistica dell'equazione di Schrödinger . . . . .       | 3         |
| 1.2.2    | Una formulazione indipendente dal tempo . . . . .                                 | 4         |
| 1.3      | Formulazione generale . . . . .                                                   | 5         |
| 1.3.1    | L'equazione di Schrödinger relativistica . . . . .                                | 5         |
| 1.3.2    | L'equazione di Schrödinger relativistica in letteratura . . . . .                 | 6         |
| 1.4      | Stati stazionari . . . . .                                                        | 7         |
| 1.5      | Particelle molto leggere . . . . .                                                | 8         |
| <b>2</b> | <b>Problemi che ho risolto</b>                                                    | <b>8</b>  |
| 2.1      | La buca sferica infinita . . . . .                                                | 8         |
| 2.2      | Buca monodimensionale finita . . . . .                                            | 10        |
| <b>3</b> | <b>Problemi che non ho risolto</b>                                                | <b>12</b> |
| 3.1      | Potenziale coulombiano . . . . .                                                  | 12        |
| 3.2      | Oscillatore armonico . . . . .                                                    | 13        |

